תרגיל 6 ביסודות תורת הפונקציות המרוכבות

1. חשב את האינטגרל הבא עבור $a \in \mathbb{C}$ המקיים $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2} \tag{1}$$

2. בתרגיל הזה נחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.
נגדיר: $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C},\ \gamma_1(t) = t$ ו- $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ \gamma_2(t) = Re^{it}$.
נסמן ב- γ את ההרכבה של המסילות γ_1, γ_2.
(א) חשב את $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)}$ כאשר $R \to \infty$. (רמז: השתמש בנוסחת האינדקס)
(ב) הוכח כי $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+4)} = 0$.
(ג) חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

3. בתרגיל הזה נחשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx$ עבור $0 < a \in \mathbb{R}$.
נגדיר: $\gamma_1 : [-R, R] \to \mathbb{C},\ \gamma_1(t) = t$ ו- $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ \gamma_2(t) = Re^{it}$.
נסמן ב- γ את ההרכבה של המסילות γ_1, γ_2.
(א) הוכח כי $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz = \frac{e^{-a}}{2ia} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-ia}$. (רמז: הראו תחילה כי $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz = \frac{1}{2ia} \int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z-ia}\, dz$ והשתמשו בפיתוח טיילור)
(ב) חשב את $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz$ כאשר $R \to \infty$. (השתמשו בסעיף א')
(ג) הוכח כי $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\, dz = 0$.
(ד) חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx$.

4. חשב את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx$ עבור $a > b > 0$.